数理解析研究所講究録
第 1785 巻 2012 年 67-72

部分直積群の正規化群計算の高速化について

宮本 泉
IZUMI MIYAMOTO
山梨大学
UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 部分群の共役と正規化群

G, H, K : 集合 Ω 上の置換群とする。

- H と K は G において共役 $\Longleftrightarrow$ $g^{-1}Hg = K$ for some $g \in G$
- $H = K$ として、$g^{-1}Hg = K$ とする g をすべて求める
  $\Longrightarrow$ H の G における正規化群 $\mathsf{Norm}(G, H) = \{g \in G | g^{-1}Hg = H\}$

Cannon-Holt. "The transitive groups of degree 32" 2008.12

> Computing normalisers and testing conjugacy of subgroups are notoriously difficult problems even in permutation groups of small degree.

【注】ここでは、正規化群計算と関連して、共役に移す元を具体的に求める。

2 Definitions and Notations

- $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$, $n = G$ の次数 (*degree*)
- G の $i \in \Omega$ をふくむ *orbit* $\Longleftrightarrow$ $\{i^g | g \in G\}$
- G は Ω 上、可移 (*transitive*) $\Longleftrightarrow$ G は Ω 上の orbit が 1 個
  $\Longleftrightarrow$ $\{i^g | g \in G\} = \Omega$ for any $i \in \Omega$
- G における点 i の固定部分群 $\Longleftrightarrow$ $G_i = \{g \in G | i^g = i\}$
- G の Ω^2 上への作用 : $(i, j)^g = (i^g, j^g)$ for $(i, j) \in \Omega^2$ and $g \in G$

【Fact】 $N = \mathsf{Norm}(G, H)$ とする。
N は H の orbit の集合に作用。$H \quad G$ のときは、$H \quad N$ となることより、N の orbit は、H の同じサイズの orbit いくつかの和集合

$\Longrightarrow H \quad N \quad A \quad G$, A : 上の条件を満たす簡単に計算できる群を探す。

---

imiyamoto1@gmail.com

3 コヒアラントコンフィグレーション

コヒアラントコンフィグレーション $(\Omega, \{R_i\}_{i=0,1,2,\cdots,d})$ H の Ω^2 への作用の orbitR_i

【例】 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $H = \mathsf{Group}((1,5,4)(2,6,3),(1,6,3,2,5,4))$

$$\left.\begin{array}{l} R_0 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}, \\ R_1 = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(5,6),(6,5)\}, \\ R_2 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),\cdots,(6,1),(6,2)\}, \\ R_3 = {}^tR_2 = \{(3,1),(4,1),(3,2),\cdots,(1,6),(2,6)\} \end{array}\right\} \quad \Omega \quad \Omega\text{上の orbit 4個}$$

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{n \in N} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

コヒアラントコンフィグレイションの自己同型

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

自己同型群 $Aut(C) = \mathsf{Group}((3,5,4,6),(1,6,2,5)(3,4)) \supsetneqq H$

$Aut(C)$ のΩ^2上の orbit への作用： $\overset{\circlearrowleft}{R_0},\ \overset{\circlearrowleft}{R_1},\ R_2 \rightleftarrows R_3$

命題 3.1

$$\mathsf{Norm}(G,H) \quad Aut(C)$$

$Aut(C)$ は、通常、簡単に計算可能 (実験してみると、これだけではあまり効果はない)

4 可移な群の正規化群計算に使った方法

【Assumption】 N が H と、共通の orbit O をもつ。$\Longrightarrow N =< H, N_i >$, $i \in O$ が成立

【Example】 $\Omega = \{1,2,\cdots,28\}$ $H = \mathsf{TransitiveGroup}(28,1528)$, $G = SymmetricGroup(28)$

$\Longrightarrow \Omega$ は、H, N 共通の orbit $\Longrightarrow N =< H, N_1 >$

点 1 の固定部分群 H_1 の orbit $\{1\},\{2\},\{3,4,\cdots,28\}$

$\Longrightarrow \{3,4,\cdots,28\}$ は、H_1, N_1 共通の orbit $\Longrightarrow N =< H_1, (N_1)_3 >$

正規化群計算 $N_{1,3} = (N_1)_3$ は、H における点 1,3 の固定部分群 $H_{1,3}$ を正規化する。

$n^{-1}H_{1,3}n = H_{1,3}$, for all $n \in N_{1,3}$

$\Longrightarrow N =< H, (H_{1,3}\text{の正規化群}) \cap (H_1\text{の正規化群}) \cap N >$

$H, H_1, H_{1,3}$ の作るコヒアラントコンフィグレイション $C, C^{(1)}, C^{(2)}$ の自己同型群 $A, A^{(1)}, A^{(2)}$ を計算する。

$$\begin{array}{rcccl}
|A| & & & = & 2^{14}14! & = & 1428329123020800 \\
|A^{(1)} \cap A| & = & |A^{(1)}| & = & 2^{13}13! & = & 51011754393600 \\
|A^{(2)} \cap A^{(1)} \cap A| & = & |A^{(2)}| & & & = & 196608
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
N = N(G,H) &= < H, \mathsf{Norm}(A^{(2)}, H) > \\
&= < H, \mathsf{Norm}(\mathsf{Norm}(A^{(2)}, H_1), H) > \\
&= < H, \mathsf{Norm}(\mathsf{Norm}(\mathsf{Norm}(A^{(2)}, H_{1,3}), H_1), H) >
\end{aligned}$$

A は、大きな wreath 積群となっていて、これだけでは不十分
$A^{(2)}$が、十分小さい群となって、正規化群が簡単に計算できる

【Remark】

- H / $A^{(2)}$ である群に対して、$\mathsf{Norm}(A^{(2)}, H)$ を計算している。
- Magma では、$\mathsf{Norm}(G, H)$ の計算は H 　G となることが必要。

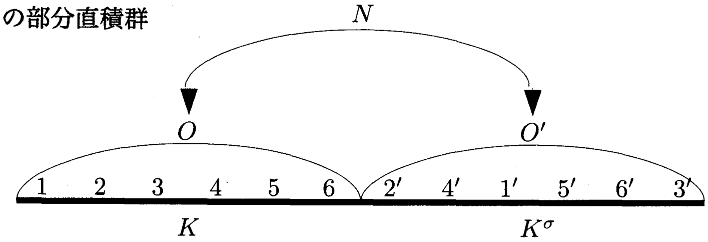
5 部分直積群 (Subdirect Product)

H と N =$\mathsf{Norm}(G, H)$ が共通の orbit をもたない "簡単" な場合

- H は、Ω 上、2個の orbit O, O' をもつ。
- N の作用は、O, O' を交換する。

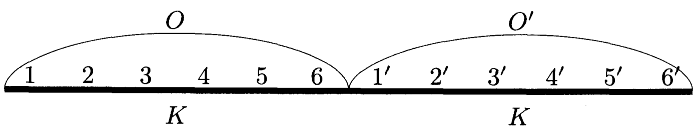
$\Longrightarrow$ H の O と O' 上への作用 (H,O), (H,O') は、置換群として同型。
K は O 上の置換群、L を O' 上の置換群、直積群 K 　L を $\Omega = O \cup O'$ 上の置換群とする。
【定義】(部分直積群) 部分群 H 　K 　L で、$K \cong (H,O)$, $L \cong (H,O')$ が成立するとき、H を部分直積群という。より多くの個数の直積 K_1 　K_2 　$\cdots$ 　K_s の部分直積群も、同様に定義する。
部分直積群の構成法 GAP システムのコマンド SubdirectProducts を使用する。

K 　K の部分直積群



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 2' & 4' & 1' & 5' & 6' & 3' \end{pmatrix} = (1', 2', 4', 5', 6', 3')$$

SubdirectProducts では、下の様に作用する群を構成するので、



一般の場合では、共役に移す元 σ を求める必要がある。

部分直積群の正規化群計算 (H が、置換群として同型に作用する２個の orbit O, O' をもつ場合)

1. Action(H, O) を Action(H, O') に移す共役元 σ を計算する。
   【注意】Action(H, O) は可移となっている。 → 昨年の本研究集会の共役計算法を利用

2. σ から、O と O' を交換する元 $n \in N$ を構成する。

3. (a) 【方法１】正規化群中の O と O' を交換しない部分群を N_O を計算する。 → $N = < n, N_O >$ となる。
   【注意】H と N_O は共通の orbit$O$ をもつ。

   (b) 【方法２】Action(H, O) の O 上の正規化群 M を計算し、Norm$(< n, M >, H) = N$ を計算する。
   【注意】$< n, M >\cong$WreathProduct$(M, Sym(2))$ が成立。

計算実験の様子から、【方法１】は GAP 向き、【方法２】は Magma 向き。
H の orbit の個数が 2 より多い場合について

- orbit の個数が 4 まで、計算実験をした。
- 方法１では、最大で、4 個の orbit の置換全体 $4! = 24$ 個の $n_i \in N$ を求め、各 n_i によって orbit の置換を行った後、正規化群中のすべての orbit を固定する部分群 N_0 を計算して、$N = < \cdots, n_i, \cdots, N_0 >$ を求める。
- orbit の個数が多いとき、各 orbit は、$|O_j| \ll |\Omega|$ となり、Action(H, O_j) の正規化群計算は簡単。orbit の集合上への作用の計算が本質的部分と考えられる。
- 本実験では、$|O_j|$ が比較的大きく、Action(H, O_j) の正規化群計算と orbit 集合への作用の計算が混ざることによって、計算困難を引き起す場合を想定。

6 計算実験

6.1 １６次の可移置換群２個の直積の正規化群計算 in $Sym(32)$

１６次の可移群 1954 個　TransitiveGroup$(16, i)$, (1　i　1954)

Norm$(Sym(32)$, TransitiveGroup$(16, i)^2)$ の全計算時間

GAP	1632 秒	最新バージョン
GAP 本研究の方法	210 秒	〃
Magma2.8	?	最新バージョンは、
Magma2.8 本研究の方法	72 秒	5th Nov 2011 Magma V2.17-13

【参考】１６次の可移置換群の正規化群計算 in $Sym(16)$

Norm$(Sym(16)$, TransitiveGroup$(16, i))$ の全計算時間

GAP	253 秒	最新バージョン
GAP+ 可移群への工夫	165 秒	〃
Magma2.8	49 秒	
Magma2.17-12	17 秒	by Magma calculator

１６の可移置換群２個の直積の正規化群計算 in $Sym(32)$ の例

Norm($Sym(32)$, TransitiveGroup($16, i$) TransitiveGroup($16, j$)) の計算時間

i	j	Magma2.8	Magma calculator	GAP
1484	1484	5793 秒	> 60 秒	0.3 秒
1379	1379	11043 秒	> 60 秒	0.3 秒
1223	1223	10199 秒	> 60 秒	0.3 秒
1187	1187	5847 秒	> 60 秒	0.4 秒
465	465	145 秒	> 60 秒	0.2 秒
1075	1075	1.3 秒	2.9 秒	78.0 秒
1505	1505	0.8 秒	0.2 秒	49.3 秒
1502	1502	36.2 秒	12.5 秒	46.6 秒
1501	1501	43.6 秒	22.3 秒	32.1 秒
1221	1210	27438 秒	> 60 秒	0.4 秒
1461	1210	13805 秒	> 60 秒	0.2 秒
1223	1187	24135 秒	> 60 秒	0.2 秒
1075	1501	14.0 秒	6.1 秒	114.0 秒
1502	1505	2.8 秒	1.2 秒	58.5 秒
1484	1501	6035 秒	> 60 秒	39.8 秒

6.2 PrimitiveGroup$(8, 3)^4$ の部分直積群の正規化群計算 in $Sym(32)$

4 個の PrimitiveGroup(8, 3) の部分直積群の同型類 56 個

Norm($Sym(32)$, PrimitiveGroup$(8,3)^4$の部分直積群) の計算時間（秒）

番号	Magma2.8/calculator		GAP	本研究 GAP	本研究 Magma
全計算	11,595		227,761	296	1,083
14	186	> 60	9422	2.9	11
48	2,058	> 60	372	4.6	187
49	4,406	> 60	1293	3.0	487
50	116	54	3798	5.0	13
54	2,584	> 60	2018	3.2	273
15	11.0	4.3	43945	4.3	0.6
17	6.0	2.0	90151	2.2	0.7
19	8.1	4.3	53017	4.4	0.4
22	0.3	0.15	0.1	19.6	0.02
42	78	31.2	15.2	28.7	3.1

6.3 PrimitiveGroup$(8, 1)^4$ の部分直積群の正規化群計算 in $Sym(32)$

4 個の PrimitiveGroup(8, 1) の部分直積群の同型類 49 個

Norm($Sym(32)$, PrimitiveGroup$(8,1)^4$の部分直積群) の全計算時間		
GAP	195 秒	最後の 1 個:180 秒, 残り 15 秒
GAP 本研究の方法	264 秒	$\approx 15 \quad 24 = 4!$ 倍 (orbit 4 個)
Magma2.8	6610 秒	
Magma2.8 本研究の方法	13 秒	

GAP ライブラリの PrimitiveGroup について

- PrimitiveGroup(8,1)≅ $AGL(1,8)$
- PrimitiveGroup(8,3)≅ $AGL(3,2)$

【補足】

Magma は 2011.12.10 にでた version 2.18 で、置換群の正規化群計算と部分群の共役計算が、飛躍的に改善された。本研究の Magma Calculator で 1 分以上かかっていた場合は、すべて、瞬時に計算できるようになった。そこで、PrimitiveGroup(16,11)≅ $AGL(4,2)$ を 4 個使った部分直積群を使った実験をしてみると、本実験のときと同様 1 分以上場合がでてきた。
GAP は、4.5 の version が出ている。これには、本研究で考えている群の対称群内における正規化群計算では、本研究の Magma 向けの方法が組込まれている。